AdMathEdu

ISSN 2088 - 687X

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

AdMathEdu | Vol. 4 No. 1 | Juni 2014 | Hal. 1 - 108

ISSN 2088-687X

AdMathEdu

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

Jurnal Ilmiah AdMathEdu, terbit 6 bulan sekali (Juni, Desember) sejak 2011, diterbitkan oleh Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Ahmad Dahlan. Jurnal ini diharapkan sebagai media bagi staf dosen, peneliti, praktisi, guru, mahasiswa dan masyarakat luas yang memiliki perhatian terhadap bidang dan perkembangan pengajaran matematika dan matematika. Redaksi menerima naskah berupa hasil penelitian, studi pustaka, pengamatan atau pendapat atas suatu masalah yang timbul dalam kaitannya dengan perkembangan bidang-bidang di atas dan belum pernah diterbitkan oleh jurnal lain. Redaksi berhak memperbaiki atau mempersingkat tanpa mengubah isi. Artikel dimuat setelah melalui tahap seleksi.

Alamat Redaksi
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD
Jl. Prof. Dr. Soepomo, SH Warungboto Yogyakarta 55164
Telp. : (0274) 8250518 E-mail : admathedu@gmail.com
Website : http://admathedu.uad.ac.id

AdMathEdu | **Vol. 4 No. 1** | **Juni 2014** | **Hal 1-108**

AdMathEdu

ISSN 2088-687X

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

AdMathEdu | Vol. 4 No. 1 | Juni 2014 | Hal 1 - 108

ISSN 2088-687X

AdMathEdu

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

EDITORIAL

Artikel-artikel yang diketengahkan dalam Jurnal AdMathEdu edisi ini, mencakup tentang Π-Semigrup Reguler dan Q-Semigrup Reguler, Penyelesaian Numeris Masalah Bendungan-Kering dengan Metode Volume Hingga, Kemampuan Mahasiswa dalam Pembuktian Teorema Melalui Metode Heuristic Model Polya, Penerapan Pembelajaran Kooperatif Teknik *Student Teams Achievement Divisions* (STAD) untuk Meningkatkan Aktivitas Siswa pada Pokok Bahasan Kesebangunan Kelas IX-C SMP Negeri 143 Jakarta, dan Efektivitas Penggunaan *Statistics Concepts Exploring Tools* (SCET) dalam Pembelajaran Statistika.

Lima arikel berikutnya membahas tentang Struktur Lokal pada Semigrup Legal, Kesalahan dalam Pemecahan Masalah Divergensi pada Mahasiswa Matematika, Metode Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo untuk Estimasi Bayesian dalam Model Regresi Linear per Potongan, Mengintegrasikan Islam ke Dalam Pembelajaran Matematika, dan Efektivitas Pembelajaran Matematika dengan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe *STAD (Student Team Achievement Division)* pada Mahasiswa Semester V Program Studi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Ahmad Dahlan Yogyakarta Tahun Ajaran 2013/2014.

Demikian rangkaian artikel yang kami sajikan pada edisi kali ini. Semoga bisa memberikan tambahan wawasan dan pemahaman mengenai perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Sekian dan selamat membaca.

REDAKSI

ISSN 2088-687X

AdMathEdu

JURNAL PENDIDIKAN MATEMATIKA, ILMU MATEMATIKA DAN MATEMATIKA TERAPAN

DAFTAR ISI

ISSN 2088-687X

Π-SEMIGRUP REGULER DAN Q-SEMIGRUP REGULER

Cicilia Puji Rahayu[a)] **Sri Wahyuni**[b)]
[a)]Prodi Sistem Komputer Universitas Surakarta
cicilia_puji@ymail.com
[b)]Jurusan Matematika FMIPA UGM
swahyuni@ugm.ac.id

ABSTRAK

Grup adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan satu operasi biner dan memenuhi sifat tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Apabila eksistensi elemen identitas tidak disyaratkan (yang berarti eksistensi invers juga tidak disyaratkan), hal ini memberi peluang untuk mendefinisikan suatu klas baru yang lebih umum yaitu semigrup. Semigrup adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat tertutup dan assosiatif. Pada semigrup S apabila setiap elemen a di S merupakan elemen reguler yaitu terdapat x di S sedemikian sehingga $axa = a$, semigrup tersebut disebut semigrup reguler. Pada elemen e di S yang memenuhi sifat $e^2 = ee = e$ disebut elemen idempoten. Himpunan elemen-elemen idempoten yang dinotasikan dengan E(S) dalam semigrup reguler belum tentu membentuk subsemigrup. Jika himpunan elemen idempoten E(S) membentuk subsemigrup, maka semigrup S dinamakan semigrup ortodoks. Zheng & Ren (2010) memberikan suatu kelas baru yaitu V-semigrup reguler yang merupakan bentuk dual dari semigrup ortodoks.

Dilain pihak dalam perkembangannya, Yamada dalam Yamada & Sen (1989) memperkenalkan suatu kelas semigrup reguler baru yang dinamakan Π-semigrup reguler. Dalam makalah ini ditunjukkan bahwa eksistensi syarat untuk setiap q elemen P sedemikian sehingga qPq termuat dalam P pada definisi Π-semigrup reguler dapat dihilangkan atau tidak disyaratkan sedemikian sehingga semigrup S tetap merupakan Π-semigrup reguler.

Selanjutnya dengan termotivasi oleh satu sifat Π-semigrup reguler, memberikan peluang untuk mendefinisikan suatu kelas baru yang dinamakan Q-semigrup reguler. Pada kenyataannya Q-semigrup reguler tersebut merupakan bentuk dual dari Π-semigrup reguler.

Kata Kunci : Semigrup reguler, Π-semigrup regular, Q-semigrup regular.

ABSTRACT

Grup is one of the algebra structure consisting of a non-empty set with binary operation which satisfied closed propertiy, assosiative, have identity element and every element has inverse. If the existence of inverse is not required (which is the existence of inverse is not required also), its give an opportunity defined a new class which more general i.e. semigroups. Semigroups is a non empty set which a binary operation and assosiative defined. An element a of semigroups S is called regular element if there exists x in S such that axa = a. The semigroups S is called regular semigroups if all its element are regular. An element e of semigroups which is satisfied $\mathrm{e}^2 = \mathrm{ee} = \mathrm{e}$ is called idempotent element. A set of idempotent element which is denoted by E(S) in regular semigroups is not always a subsemigroups. If the set of idempotent element was a the subsemigroups of S then S semigroups is called ortodhox semigroups. Zheng & Ren (2010) give a new class i.e V-regular semigroups which is dual form of ortodhox semigroups.

In the progress, Yamada in Yamada & sen (1989) introduced a new regular semigroups class called Π–regular semigroups. In this thesis showed that the existece of condition for any q element P such qPq subset P in Π–regular semigroups can be eliminated or not required, so that S semigroups is still Π–regular semigroups.

Motivated by one of properties on Π–regular semigroups, it is gives an opportunity to defined a new class which is called Q-regular semigroups. In fact, the concept of Q-regular semigroups is the dual form of Π–regular semigroups.

Keywords : Regular Semigroup, Π-regular semigroup, Q-regular semigroup.

Pendahuluan

Grup adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat assosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Apabila aksioma eksistensi elemen identitas dan invers tidak disyaratkan, hal ini memberikan ide untuk mendefinisikan struktur yang lebih umum yang dinamakan semigrup. Semigrup adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang bersifat assosiatif. Untuk selanjutnya pada makalah ini, semigrup dinotasikan dengan S.

Eksistensi elemen identitas tidak harus dipenuhi pada semigrup S, yaitu tidak harus berlaku untuk setiap a elemen S terdapat a^{-1} elemen S sedemikian sehingga $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ sebagai akibatnya $aa^{-1}a = ea = a$ dan $aa^{-1}a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$ tentu saja juga tidak selalu dipenuhi pada semigrup S. Hal ini memberikan peluang untuk mendefinisikan elemen reguler. Apabila pada semigrup S tersebut berlaku untuk suatu a elemen S terdapat a^{-1} elemen S sedemikian sehingga $aa^{-1}a = a$, atau secara umum dituliskan untuk suatu elemen a tersebut terdapat x elemen S sedemikian sehingga $axa = a$, maka a disebut elemen reguler. Lebih lanjut jika untuk setiap elemen S merupakan elemen reguler maka semigrup S dinamakan semigrup reguler.

Selanjutnya apabila untuk suatu elemen a di S terdapat x elemen S sedemikian sehingga $axa = a$ dan $xax = x$, maka x disebut invers dari elemen a. Pada semigrup reguler S, tidak semua elemen a di S mempunyai invers dan lebih lanjut inversnya tunggal. Apabila berlaku hal demikian yaitu untuk setiap a elemen S terdapat dengan tunggal x sedemikian sehingga $axa = a$ dan $xax = x$, maka semigrup S disebut semigrup invers. Untuk selanjutnya pada penulisan tesis ini, invers dari suatu elemen a di S dinotasikan dengan a^{+} dan himpunan semua invers dari a tersebut dituliskan dengan $V(a) = \{x \epsilon S | axa = a \text{ dan } xax = x\}$.

Pada semigrup reguler S berlaku untuk setiap a elemen di S terdapat x elemen S sedemikian sehingga $axa = a$, akibatnya $(axa)x = ax$ hal ini dapat dituliskan menjadi $(ax)(ax) = (ax)^2 = ax$. Misalkan ax dituliskan dengan e sehingga berlaku $e^2 = e$, elemen yang memenuhi sifat demikian disebut elemen idempoten dan himpunannya disebut himpunan elemen idempoten yang selanjutnya dinotasikan dengan E(S) yaitu $E(S) = \{e \in S | e^2 = e\}$.

Himpunan semua elemen idempoten E(S) di semigrup S tidak selalu membentuk subsemigrup yaitu belum tentu berlaku sifat tertutup. Misalkan himpunan semua elemen idempoten E(S) membentuk subsemigrup, semigrup reguler S tersebut dinamakan semigrup ortodoks. Salah satu sifat penting dari semigrup ortodoks yang digunakan sebagai dasar pada pembahasan penulisan ini adalah semigrup reguler S merupakan semigrup ortodoks jika dan hanya jika untuk setiap a dan b elemen di S sedemikian sehingga berlaku $V(b)V(a) \subseteq V(ab)$. Dalam Zheng & Ren (2010), Onstad memperkenalkan suatu kelas semigrup reguler baru yang dinamakan V-semigrup reguler dan merupakan bentuk dual dari semigrup ortodoks. Semigrup reguler S dinamakan V-semigrup reguler apabila untuk setiap a dan b elemen di S berlaku $V(ab) \subseteq V(b)V(a)$.

Selanjutnya dalam Yamada dan Sen (1989), Yamada memperkenalkan kelas semigrup reguler baru yang dinamakan dengan Π-semigrup reguler. Pada tesis ini akan ditunjukkan bahwa syarat untuk setiap q elemen P sedemikian sehingga qPq termuat dalam P dapat dihilangkan atau tidak disyaratkan untuk terpenuhi sedemikian sehingga semigrup S tetap merupakan Π-semigrup reguler.

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Apakah syarat untuk setiap q elemen P sedemikian sehingga qPq termuat dalam P pada definisi Π-semigrup reguler dapat dihilangkan atau tidak disyaratkan sedemikian sehingga semigrup S tetap merupakan Π-semigrup reguler?
2. Bagaimanakah definisi dan karakterisasi kelas Q-semigrup reguler?
3. Apakah Q-semigrup reguler merupakan bentuk dual dari Π-semigrup reguler?

Hasil dan Pembahasan

1. Π-Semigup Reguler

Munculnya definisi Π-semigrup reguler termotivasi dari sifat-sifat yang berlaku pada semigrup reguler. Pada semigrup reguler S dengan E(S)

ISSN: 2088-687X

himpunan semua elemen idempoten S berlaku sifat untuk setiap e dan f elemen E(S) belum tentu berlaku bahwa ef juga elemen E(S) . Hal ini memberikan peluang untuk membentuk himpunan $P^2 = \{ef \mid e, f \in P \subseteq E(S)\}$ sedemikian sehingga $P^2 \subseteq E(S)$. Selanjutnya apabila $q, p \in P \subseteq E(S)$ belum tentu $qp \in E(S)$ mengingat S merupakan semigrup reguler yang berarti E(S) belum tentu subsemigrup. Dengan demikian berakibat belum tentu $qp \in P$ dan lebih lanjut belum tentu berlaku $qpq \in P$. Dari sini memunculkan ide untuk membangkitkan kondisi untuk setiap $q \in P$ sehingga berlaku $qPq \subseteq P$. Mengingat S merupakan semigrup reguler, dengan demikian untuk setiap a elemen S belum tentu terdapat $a^+ \epsilon V(a)$ sehingga berlaku $a^+aa^+ = a^+$ dan $aa^+a = a$. Selanjutnya untuk suatu $p \in P \subseteq E(S)$ belum tentu berlaku $ap, a^+p \in P$ dan lebih lanjut belum tentu $apa^+, a^+pa \in P$. Hal ini memberikan motivasi untuk membangkitkan kondisi untuk setiap a elemen S terdapat $a^+ \epsilon V(a)$ sedemikian sehingga $aP^1a^+, a^+P^1a \subseteq P$ dimana $P^1 = P \cup \{1\}$.

Dalam Yonghua Li (2003), Yamada memberikan definisi Π-semigrup reguler adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 *Semigrup reguler S disebut Π-semigrup reguler jika terdapat $P \subseteq E(S)$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi (C.1) berikut :*

1. $P^2 \subseteq E(S)$

2. $qPq \subseteq P$, *untuk setiap* $q \epsilon P$

3. Untuk setiap $a \epsilon S$, *terdapat* $a^+ \epsilon V(a)$ *sedemikian sehingga* $aP^1a^+, a^+P^1a \subseteq P$ *dimana V(a) merupakan himpunan semua invers a dan* $P^1 = P \cup \{1\}$.

Menurut Yamada & Sen (1989), salah satu sifat penting Π-semigrup reguler diberikan pada Lemma 2.2 berikut.

Lemma 2.2 *Semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler jika dan hanya jika untuk setiap* $a \epsilon S$ *terdapat* $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ *sedemikian sehingga memenuhi kondisi (C.2) berikut:*

1. $a^+ \epsilon V_p(a) \Rightarrow a \epsilon V_P(a^+)$

2. $V_P(b)V_P(a) \subseteq V_P(ab)$ *untuk setiap* $a, b \epsilon S$

Definisi 2.3 (Yonghua Li, 2003) *Semigrup reguler S dikatakan memenuhi kondisi (C.1$^+$) jika memenuhi kondisi berikut:*

1). Terdapat $P_l \subseteq E(S)$ *dan* $P_r \subseteq E(S)$ *yang memenuhi* $P_l P_r \subseteq E(S)$ *dan* $P_r P_l \subseteq E(S)$.

Dimana

$P_l = \{a^+a \in E(S) \mid a \epsilon S \text{ dan } a^+ \epsilon V_P(a)\}$

dan $P_r = \{aa^+ \epsilon\ E(S) | a\epsilon S$ $dan\ a^+ \epsilon V_P(a)\}$

2). Untuk setiap $a\epsilon S$ *terdapat* $a^+ \epsilon V(a)$ *sedemikian sehingga* $a^+ P_l^1 a \subseteq P_l$ *dan* $a P_r^1 a^+ \subseteq P_r$

3). $qP_l^1 q \subseteq P_l$ *dan* $qP_r^1 q \subseteq P_r$ $untuk\ setiap\ q\epsilon\ P_l \cup P_r$

Teorema berikut menyatakan syarat perlu dan cukup suatu semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1$^+$).

Teorema 2.4 (Yonghua Li, 2003) *Semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1$^+$) jika dan hanya jika untuk setiap* $a\epsilon S$ *terdapat* $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ *sedemikian sehingga memenuhi kondisi (C.2$^+$) berikut:*

1). $aa^+ \epsilon V_P(aa^+)$ *dan* $a^+ a\ \epsilon\ V_P(a^+ a)$ *untuk setiap* $a \in S$ $dan\ a^+ \epsilon\ V_P(a)$

2).

$V_P(b)V_P(a) \subseteq$ $V_P(ab)\ untuk\ setiap\ a, b\epsilon\ S$

Lemma 2.5 berikut menyatakan bahwa semigrup reguler S yang memenuhi kondisi (C.1$^+$) merupakan syarat cukup agar semigrup S merupakan Π-semigrup reguler.

Lemma 2.5 (Yonghua Li, 2003) *Jika semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1$^+$) maka semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler.*

Akibat Teorema 2.4 dan Lemma 2.5, diperoleh suatu teorema baru yang menyatakan syarat perlu dan cukup suatu Π-semigrup reguler memenuhi kondisi (C.2$^+$) yang dijelaskan pada Akibat 2.6 berikut.

Akibat 2.6 (Yonghua Li, 2003) *Semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler jika dan hanya jika semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.2$^+$)*

Dengan memperhatikan Teorema 2.4 bahwa semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1$^+$) jika dan hanya jika untuk setiap $a\epsilon S$ terdapat $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi *(C.2$^+$).* Menurut Akibat 2.6, semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler jika dan hanya jika semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.2$^+$). Dengan berdasarkan dua hal tersebut dapat disimpulkan bahwa semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1$^+$) jika dan hanya jika semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler. Hal ini menunjukkan bahwa Definisi 2.1 ekuivalen dengan Definisi 2.3.

Dilain pihak hasil Akibat 2.6 tersebut juga menunjukkan bahwa bagian (2) pada kondisi (C.1) dapat dihilangkan, akibatnya memberikan ruang untuk membangkitkan satu sifat penting dari Π-semigrup reguler yang akan dijelaskan pada Teorema 2.7 berikut.

Teorema 2.7 (Yonghua Li, 2003) *Semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler jika dan hanya jika semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.1*) berikut:*

1). Terdapat $P \subseteq E(S)$ yang memenuhi $P^2 \subseteq E(S)$

2). Terdapat $a^+ \epsilon V(a)$ sedemikian sehingga $aP^1a^+ \subseteq P$ dan $a^+P^1a \subseteq P$ untuk setiap $a \epsilon S$

Contoh 2.8 *Contoh Π-semigrup reguler*

Diberikan $S = \{1,2\}$. T(S) adalah himpunan semua pemetaan dari S ke S. Jadi $T(S) = \{f | f: S \longrightarrow S\}$, atau dapat dinyatakan dengan $T(S) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ untuk $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Dengan demikian diperoleh tabel Caley sebagai berikut:

$\circ$	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	γ	δ
δ	δ	γ	γ	δ

Dengan demikian $(T(S), \circ)$ merupakan semigrup reguler dan $E(T(S)) = \{\alpha, \gamma, \delta\}$. Misalkan diambil $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Kemudian dibentuk $T(S) \times \mathbb{R}^*$ dan didefinisikan operasi biner $(f, a)(g, b) = (fg, a|b|)$ untuk setiap $(f, a), (g, b) \epsilon T(S) \times \mathbb{R}^*$ pada $T(S) \times \mathbb{R}^*$. Dengan demikian $T(S) \times \mathbb{R}^*$ tersebut merupakan semigrup reguler. Himpunan elemen idempoten $E(T(S) \times \mathbb{R}^*) = \{(\alpha, 1), (\alpha - 1), (\gamma, 1), (\gamma, -1), (\delta, 1), (\delta, -1)\} = \{(f, r) | f \in E(T(S)) \wedge r \in \{1, -1\}\}$. Misalkan diambil $P = \{(\alpha, 1), (\alpha. -1)\} \subseteq E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$. Akan diselidiki P tersebut memenuhi kondisi $(C. 1^*)$.

1. Akan diselidiki $P^2 \subseteq E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$
$(\alpha, 1)(\alpha, 1) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, 1) \in E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$; $(\alpha - 1)(\alpha - 1) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha - 1) \in E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$; $(\alpha, 1)(\alpha, -1) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, 1) \in E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$ dan $(\alpha, -1)(\alpha, 1) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, -1) \in E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$. Jadi $P^2 \subseteq E(T(S) \times \mathbb{R}^*)$.

2. Akan diselidiki untuk setiap $a = (\alpha, r) \in T(S) \times \mathbb{R}^*$, terdapat $a^+ \epsilon V(a)$ sedemikian sehingga $aP^1a^+ \subseteq P$ dan $a^+P^1a \subseteq P$.

Misalkan (α, k) invers dari $(\alpha, r) \in T(S) \times \mathbb{R}^*$, maka berlaku $(\alpha, r)(\alpha, k)(\alpha, r) = (\alpha, r) \Leftrightarrow (\alpha, r|k|)(\alpha, r) = (\alpha, r) \Leftrightarrow (\alpha, r|k||r|) = (\alpha, r)$. Jadi diperoleh $r|k||r| = r \Leftrightarrow |k||r| = 1 \Leftrightarrow |k| = \left|\frac{1}{r}\right| \Leftrightarrow k = \frac{1}{r}$ atau $k = -\frac{1}{r}$. Selanjutnya dicek untuk $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, r)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, \frac{1}{r}|r|\right)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, \frac{1}{r}|r|\left|\frac{1}{r}\right|\right) = (\alpha, \frac{1}{r})$ dan
$\left(\alpha, -\frac{1}{r}\right)(\alpha, r)\left(\alpha, -\frac{1}{r}\right) =$
$\left(\alpha, -\frac{1}{r}|r|\right)\left(\alpha, -\frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, -\frac{1}{r}|r|\left|-\frac{1}{r}\right|\right) =$

$\left(\alpha, -\frac{1}{r}|r||\frac{1}{r}|\right) = (\alpha, -\frac{1}{r})$. Sehingga invers dari (α, r) adalah $(\alpha, \frac{1}{r})$ dan $(\alpha, -\frac{1}{r})$. Untuk $(\alpha, 1) \in P$ berlaku $(\alpha, r)(\alpha, 1)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = (\alpha, r)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, r|\frac{1}{r}|\right) = (\alpha, 1) \in P$, jika $r > 0$ dan $(\alpha, r)(\alpha, 1)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = (\alpha, r)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, r|\frac{1}{r}|\right) = (\alpha, -1) \in P$, jika $r < 0$. Selain itu juga berlaku $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, 1)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\,|r|\right) = (\alpha, 1) \in P$, jika $r > 0$ dan $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, 1)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\,|r|\right) = (\alpha, -1) \in P$, jika $r < 0$. Untuk $(\alpha, -1) \in P$ berlaku $(\alpha, r)(\alpha, -1)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = (\alpha, r)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, r|\frac{1}{r}|\right) = (\alpha, 1) \in P$, jika $r > 0$ dan $(\alpha, r)(\alpha, -1)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = (\alpha, r)\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) = \left(\alpha, r|\frac{1}{r}|\right) = (\alpha, -1) \in P$, jika $r < 0$. Selain itu juga berlaku $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, -1)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\,|r|\right) = (\alpha, 1) \in P$, jika $r > 0$ dan $\left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, -1)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\right)(\alpha, r) = \left(\alpha, \frac{1}{r}\,|r|\right) = (\alpha, -1) \in P$, jika $r < 0$. Analog untuk β, γ dan δ. Jadi dengan demikian untuk P tersebut, $T(S) \times \mathbb{R}^*$ merupakan Π-semigrup regular.

Akibat 2.9 berikut menyatakan ekuivalensi dari lima pernyataan yang berkaitan dengan Π-semigrup reguler berdasarkan Teorema 2.4 sampai dengan Teorema 2.7.

Akibat 2.9 (Yonghua Li, 2003) *Jika diketahui semigrup reguler S maka pernyataan berikut ekuivalen*

1). Semigrup reguler S merupakan Π-semigrup reguler

2). Terdapat $\emptyset \neq P \subseteq E(S)$ *yang memenuhi*

i). $P^2 \subseteq E(S)$

ii). $qPq \subseteq P$, *untuk setiap* $q \in P$

iii). untuk setiap $a \in S$ *terdapat* $a^+ \in V(a)$ *sedemikian sehingga* $aP^1a^+, a^+P^1a \in P$

3). Untuk setiap $a \in S$ *terdapat* $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ *yang memenuhi:*

i). $a \in V_P(a^+)$ *untuk setiap* $a \in S$ *dan* $a^+ \in V_P(a)$

ii). $V_P(b)V_P(a) \subseteq V_P(ab)$, *untuk setiap* $a, b \in S$

4). Untuk setiap $a \in S$ *terdapat* $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ *yang memenuhi:*

i). $aa^+ \in V_P(aa^+)$ *dan* $a^+a \in V_P(a^+a)$ *untuk setiap* $a \in S$ *dan* $a^+ \in V_P(a)$

ii). $V_P(b)V_P(a) \subseteq V_P(ab)$, $(\forall a, b \in S)$

5). Terdapat $P \subseteq E(S)$ *yang memenuhi:*

i). $P^2 \subseteq E(S)$

ii). untuk setiap $a \in S$ *terdapat* $a^+ \in V(a)$ *sedemikan sehingga* $aP^1a^+ \subseteq P$ *dan* $a^+P^1a \subseteq P$

2. V-Semigrup Reguler

Pada semigrup ortodoks mempunyai salah satu sifat yaitu semigrup reguler yang memenuhi $V(b)V(a) \subseteq V(ab)$ untuk setiap $a, b \in S$ dan tidak disyaratkan kondisi sebaliknya yaitu $V(ab) \subseteq V(b)V(a)$. Hal ini

ISSN: 2088-687X

memberikan motivasi untuk membentuk suatu klas semigrup reguler baru yang dinamakan V-semigrup reguler. Dalam Zheng dan Ren (2010) dijelaskan bahwa suatu semigrup reguler S dinamakan V-semigrup reguler jika $V(ab) \subseteq V(b)V(a)$ untuk setiap $a, b \in S$.

Dalam Zheng dan Ren (2010) dijelaskan juga, dengan melihat bentuk sifat yang berlaku pada semigrup ortodoks tersebut, V-semigrup reguler merupakan bentuk dual dari semigrup ortodoks. Jadi bentuk dual pada semigrup reguler bahwa suatu semigrup reguler S' merupakan bentuk dual dari semigrup reguler S jika pada semigrup reguler S berlaku sifat untuk setiap a dan b elemen S, perkalian invers b dan invers a merupakan invers ab atau $V(b)V(a) \subseteq V(ab)$ maka pada semigrup S$'$ berlaku sebaliknya yaitu untuk setiap a dan b elemen S, invers ab dapat dinyatakan dengan perkalian invers b dan invers a atau $V(ab) \subseteq V(b)V(a)$.

3. Q-Semigrup Reguler

Dalam bagian ini akan diberikan motivasi munculnya definisi Q-semigrup reguler dan juga diberikan beberapa sifat Q-semigrup reguler. Munculnya definisi Q-semigrup reguler termotivasi dari sifat yang berlaku pada Π-semigrup reguler. Salah satu sifat dari Π-semigrup reguler yaitu untuk setiap $a \epsilon S$ terdapat $\emptyset \neq V_P(a) \subseteq V(a)$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi *(C.2⁺)*. Syarat (2) pada kondisi (C.2⁺) untuk Π-semigrup regular di atas hanya berlaku $V_P(b)V_P(a) \subseteq V_P(ab)$ untuk setiap $a, b \epsilon S$, dan tidak disyaratkan berlaku $V_P(ab) \subseteq V_P(b)V_P(a)$ untuk setiap $a, b \epsilon S$. Dari kenyataan ini, memberikan motivasi kepada kita untuk mendefinisikan jenis semigrup reguler baru yang disebut Q-semigrup reguler. Adapun definisi dari Q-semigrup reguler diberikan pada Definisi 4.1 berikut.

Definisi 4.1 *Semigrup reguler S disebut Q-semigrup reguler jika untuk setiap $a \epsilon S$ terdapat $\emptyset \neq V_Q(a) \subseteq V(a)$ yang memenuhi kondisi (C.3) berikut:*

1). $aa^+ \epsilon V_Q(aa^+)$ dan $a^+a \epsilon V_Q(a^+a)$ untuk setiap $a \epsilon S, a^+ \epsilon V_Q(a)$

2). $V_Q(ab) \subseteq V_Q(b)V_Q(b)$, $(\forall a, b \epsilon S)$

Dengan

$V_Q(a) = \{a^+ \epsilon V(a) | aa^+, a^+a \ \epsilon Q\}$.

Dengan memperhatikan bentuk dual pada semigrup reguler, disimpulkan bahwa Q-semigrup reguler merupakan bentuk dual dari Π-semigrup reguler. Mengingat pada Π-semigrup reguler memenuhi sifat $V_P(b)V_P(a) \subseteq V_P(ab)$ untuk setiap $a, b \epsilon S$, sedangkan pada Q-semigrup reguler memenuhi sifat

$V_Q(ab) \subseteq V_Q(b)V_Q(b)$

untuk setiap $a, b \epsilon S$.

Teorema 4.2 berikut menyatakan syarat perlu dan cukup suatu semigrup reguler S disebut Q-semigrup reguler.

Teorema 4.2 *Semigrup reguler S merupakan Q-semigrup reguler jika hanya jika terdapat $Q \subseteq E(S)$ yang memenuhi kondisi (C.4) berikut:*

1) $Q \cap L_a \neq \emptyset$ *dan* $Q \cap R_a \neq \emptyset$; *untuk setiap* $a \epsilon S$
2) $\omega^l|_Q = \omega|_Q \circ \mathcal{L}|_Q$ *dan* $\omega^r|_Q = \omega|_Q \circ \mathcal{R}|_Q$
3) *Untuk setiap* $a, b \epsilon S$, *jika* $(ab)^+ \epsilon V(ab)$ *sedemikian sehingga* $(ab)^+(ab), (ab)(ab)^+ \epsilon Q$, *maka terdapat* $e_1 \epsilon Q \cap L_a$ *dan* $f_2 \epsilon Q \cap R_b$ *sedemikian sehingga* $b(ab)^+a = f_2 e_1$.

Dengan berdasarkan pada Teorema 4.2, untuk suatu $Q \subseteq E(S)$ yang memenuhi kondisi (C.4) tersebut dapat didefinisikan $V_Q(a)$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi (C.3$^+$) yang merupakan syarat perlu semigrup reguler S merupakan Q-semigrup reguler.

Proposisi 4.3 *Jika S merupakan Q-semigrup reguler maka S memenuhi kondisi (C.3$^+$) berikut:*

1) *Terdapat* $V_Q(a) \subseteq V(a)$, *untuk setiap* $a \epsilon S$
2) $a \, \epsilon V_Q(a)$, *untuk setiap* $a \epsilon S$ *dan* $a^+ \epsilon V_Q(a)$
3) $V_Q(ab) \subseteq V_Q(b)V_Q(a)$, $\forall a, b \epsilon S$

Selanjutnya Akibat 4.4 berikut menyatakan syarat perlu dan cukup suatu semigrup reguler S merupakan Q-semigrup reguler.

Akibat 4.4 *Semigrup reguler S merupakan Q-semigrup reguler jika dan hanya jika semigrup reguler S memenuhi kondisi (C.3$^+$).*

Kesimpulan

Berdasarkan pada pembahasan, didapatkan kesimpulan sebagai berikut:

1) Dapat dibentuk suatu kelas semigrup reguler baru yaitu Π-semigrup reguler yang termotivasi dari sifat-sifat semigrup reguler.
2) Suatu semigrup reguler disebut Π-semigrup reguler apabila memenuhi Kondisi (C.1), akan tetapi pada makalah ini dapat ditunjukkan bahwa pada syarat untuk setiap q elemen P sedemikian sehingga qPq termuat dalam P dari definisi Π-semigrup reguler dapat dihilangkan atau tidak diharuskan untuk terpenuhi sebagai syarat Π-semigrup reguler.
3) Dengan termotivasi dari sifat-sifat Π-semigrup reguler, dapat dibentuk suatu

kelas semigrup baru yaitu Q-semigrup reguler yang merupakan bentuk dual dari Π-semigrup reguler.

Pustaka

Clifford,A.H and Preston,G.B.,1961, *The Algebraic Theory of Semigroups,* Volume 1, American Mathematical Society.

Howie, J.M.,1976, *An Introduction To Semigroups Theory,* Oxford University Press.

Howie, J.M., 1995, *Fundamental of Semigroups Theory,* Oxford University Press.

Hungerford, Thomas W., 1974, *Algebra, New York:Springer-Verlag.*

Yamada,M and Sen,M.K., 1989, Π-Regular Semigroups, *Semigroups Forum 39,* hal. 157-178.

Yonghua Li., 2003, Π-Regular Semigroups and Q-Regular Semigroups, *Southeast Asian Buletin of Mathematics 26,* hal. 967-974.

Zheng, H. & Ren, H., 2010, On V-Regular Semigroups, *International Journal of Algebra*

Alamat Redaksi
Program Studi Pendidikan Matematika FKIP UAD
Jl. Prof. Dr. Soepomo, SH Warungboto Yogyakarta 55164
Telp. (0274) 8250518 E-mail : admathedu@gmail.com
Website : http://admathedu.uad.ac.id

UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
Perguruan Tinggi Muhammadiyah Yogyakarta

9 772088 687008